حول تقاطع مخططات التجزئة الرئيسية (A) متبادلة الصفوف الفردية بالزوجية

عمار صديق محمود*، هديل حازم سامي

قسم الرياضيات ، كلية التربية، جامعة الموصل، الموصل، العراق

الخلاصة

لأي تجزئة $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ من العدد الصحيح غير السالب r يوجد لها مخطط (A) تم وضعه من قبل جيمس في العام 1978 بالاعتماد على قيمة العدد الصحيح $e \geq 2$. وفي العام 2011 قدم محمود فكرة المخطط الرئيس (أو الدليل) (A) وبالتالي استطاع إثبات وجود e من هذه المخططات لأي تجزئة μ. في هذا البحث سنقوم بمبادلة الصفوف في كل مخطط رئيس الفردية منها ب الزوجية والتي تأتي بعدها مباشرة، لمحاولة فهم سلوك تقاطع هذه المخططات الجديدة وماهي الاختلافات عن تقاطع المخططات الرئيسية الاعتيادية والتي قدمها محمود في 2011.

On the intersection of main partition diagrams (A) by exchanging odd rows in even rows

Ammar S. Mahmood *, Hadil H. Sami

Department of Mathematics, College of Education, University of Mosul, Mosul, Iraq

Abstract:

For any partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ of a non-negative integer r there exist a diagram (A), has been developed by James in 1978 depending on the value of the positive integer $e \geq 2$. In 2011, Mahmood introduced the idea of main diagram (A) and he proved there exist e of main diagrams (A) for each partition μ. In this paper we will exchange all odd rows in main diagrams (A) by even rows which come immediately after them and we will try to know the behavior of the intersection of these new main diagrams, also what are the differences from the intersection of the main diagrams presented by Mahmood in 2011.

Kaywords : partion , β_ numbers **a**nd main diagram (A)

المقدمة:

ليكن r عدداً صحيحاً غير سالب، يقال للمتتابعة $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ بأنها تركيب composition لِـ r إذا كانت $|\mu| = \sum_{j=1}^{n} \mu_j = r$ حيث أن $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ هي أعداد صحيحة غير سالبة. ويقال عن التركيب μ بأنه تجزئة partition لِـ r إذا كانت $\mu_j \geq \mu_{j+1}$ لكل $j \geq 1$. تعرف اعداد– β لأي تجزئه μ لِـ r بأنها $\beta_i = \mu_i + b - i$ لأي $1 \leq i \leq b$ و b عدد صحيح موجب اكبر اومساياً لعدد اجزاء μ حيث يطلق على المجموعة $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_b\}$ أنها مجموعة اعداد β_ للتجزئة μ.

*Email : asmahmood65@yahoo.fr

قدم جيمس في [2] بأنه لأي تجزئة μ يوجد لها مخطط (A) وفق ما يلي:

ليكن لدينا العدد الصحيح $e \geq 2$، كل عدد من اعداد_β سيتمثل في المخطط الأتي والذي يطلق عليه المخطط (A):

runner −1	runner −2	…	runner − e
0	1	…	e − 1
e	e + 1	…	2e −1
2e	2e + 1	…	3e −1
.	.	…	.
.	.	…	.

إذ إن عدد β سيمثل بعقدة (bead) (.)، أما إذا لم يوجد فستكون القيمة في المخطط (A) متمثلة بفراغ (−).

مثال: إذا كانت $\mu = (6,6,5,5,3,1,1)$، واذا كانت $b = 8$ فأن مجموعة أعداد_β ستكون $\{13,12,10,9,6,3,2,0\}$ والمخطط (A) حينما $e = 2$ سيكون:

0	1		•	−
2	3		•	•
4	5	β_number	−	−
6	7	$\xrightarrow{b=8}$	•	−
8	9		−	•
10	11		•	−
12	13		•	•

في حين سيكون المخطط (A) للتجزئة نفسها حينما $e = 3$ على نحو الآتي:

0	1	2		•	−	•
3	4	5		•	−	−
6	7	8	$\xrightarrow{\beta\_number}$	•	−	−
9	10	11		•	•	−
12	13	14	$b = 8$	•	•	−

فايرس في [2] قدم التعاريف التالية:

لاي عدد صحيح $e \geq 2$، يقال عن التجزئة μ بأنها منتظمة من النوع – e (e – regular) اذا كان لايوجد $i \geq 1$ بحيث ان $\mu_i = \mu_{i+e-1} > 0$، ويقال عن التجزئه μ بأنها مقيدة من النوع– e (e – restricted) اذا كانت $\mu_i - \mu_{i+1} < e,\ \forall\, i \geq 1$.

2. تقاطع المخططات الرئيسية:

إن المخطط (A) الذي تم الحديث عنه في البند الأول من هذا البحث ممكن ان يقابله عدداً غير منته من المخططات فكلما غيرنا قيمة e وقيهة b كان المخطط (A) مختلفاً كلياً عن اي مخطط اخر رسم . فهنا قدم محمود في [4] فكرة وجود مخططات رئيسية (احياناً اطلق عليها الدلائل) وهي التي ستلعب دوراً مهماً في رسم وتحديد نمط المخطط وبالتالي سيكون لدينا عدداً منتهياً من هذه المخططات.

تعريف(1.2):[4] لتكن μ تجزئة لِ r ذو n من الحدود، فيقال عن كل من

$$b_1 = n, b_2 = n + 1, \cdots, b_e = n + (e - 1)$$

إنها دلائل لهذه التجزئة عند رسم المخطط (A).

مثال: لتكن $\mu = (6,6\ ,5,5\ ,3,1,1)$ تجزئة لِ27. فإن كل من $b_2 = 8, b_1 = 7$ هي دلائل لهذه التجزئة في حالة اختيارنا $e = 2$، في حين إذا اخترنا $e = 3$ فإن دلائل التجزئة نفسها ستكون $b_3 = 9, b_2 = 8, b_1 = 7$.

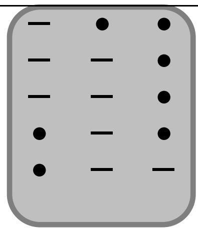
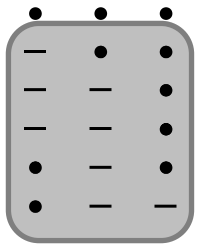
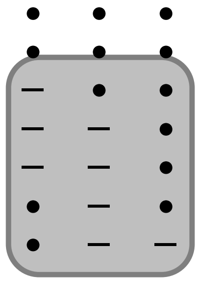
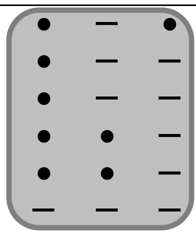
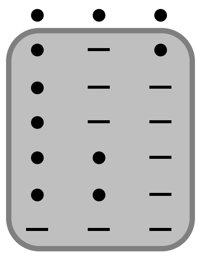
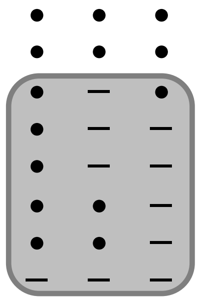
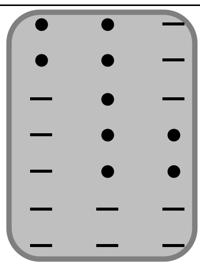
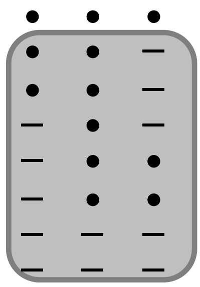
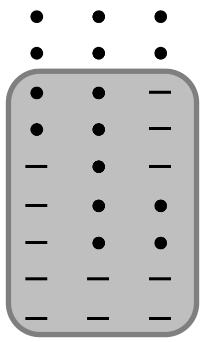
تعريف(2.2):[3] كل مخطط (A) لاحدى قيم الدلائل يدعى بالمخطط الرئيس او الدليل (main or guide diagram).

مبرهنة (3.2):[4] يوجد e من المخططات الرئيسية لاية تجزئة μ لِ r.

مثال: يوجد مخططان رئيسيان للتجزئة $\mu = (6\ ,6\ ,5\ ,5,3,1\ ,1)$ في حالة $e = 2$ وثلاثة مخططات رئيسية في حالة $e = 3$ وكما يلي:

$\mu = (6\ ,6\ ,5\ ,5,3,1\ ,1)$				
$e = 2$	$b_1 = 7$	$b_1 + e$	$b_1 + 2e$	...
0 1	– •	• •	• •	
2 3	• –	– •	• •	
4 5	– •	• –	– •	
6 7	– –	– •	• –	
8 9	• •	– –	– •	
10 11	– •	• •	– –	
12 13	• –	– •	• •	
14 15		• –	– •	
16 17			• –	

$e = 2$	$b_2 = 8$	$b_2 + e$	$b_2 + 2e$	...
0 1	• –	• •	• •	
2 3	• •	• –	• •	
4 5	– –	• •	• –	
6 7	• –	– –	• •	
8 9	– •	• –	– –	
10 11	• –	– •	• –	
12 13	• •	• –	– •	
14 15	– –	• •	• –	
16 17		– –	• •	
18 19			– –	

$\mu = (6,6,5,5,3,1,1)$				
$e = 3$	$b_1 = 7$	$b_1 + e$	$b_1 + 2e$	…
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20				
$e = 3$	$b_2 = 8$	$b_2 + e$	$b_2 + 2e$	…
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 6 17 18 19 20 21 22 23				
$e = 3$	$b_3 = 9$	$b_3 + e$	$b_3 + 2e$	…
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26				

قاعدة (4.2):[4] لتكن μ تجزئة لِـ r فأنه:

1. سنرمز لتقاطع المخططات الرئيسية بالرمز $\cap_{s=1}^{e} m.d_{,b_s}$.

2. نتيجة التقاطع تكون قيمة عددية فتعني أن هناك بعدد هذه القيمة عقداً، أما إذا لم توجد اية عقدة فأن نتيجة التقاطع ستكون ∅ وسنرمز لهذه العملية بالرمز $\#(\cap_{s=1}^{e} m.d_{,b_s})$.

بالعودة إلى المثال السابق عندما $\mu = (6,6,5,5,3,1,1)$ فإن نتيجة التقاطع حينما $e = 2,3$ ستكون:

$m.d_{b_1}=7$	$m.d_{b_2}=8$		$\bigcap_{s=1}^{2} m.d_{b_s}$
– • • – – • – – • • – • • –	• – • • – – • – – • • – • • – –	$\Rightarrow$	– – • – – – – – – • – – • – – –

$m.d_{b_1}=7$	$m.d_{b_2}=8$	$m.d_{b_3}=9$		$\bigcap_{s=1}^{3} m.d_{b_s}$
– • • – – • – – • • – • • – – – – –	• – • • – – • – – • • – • • – – – –	• • – • • – – • – – • • – • • – – –	$\Rightarrow$	– – – – – – – – – – – – – – – – – –

مبرهنة (5.2):[4]

1. لأي تجزئة μ لِ r من النمط (w-regular) فأن:

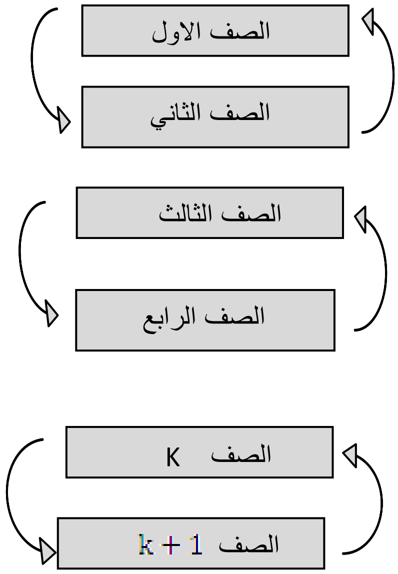
$$\#\left(\bigcap_{s=1}^{e} m.d_{b_s}\right)=\begin{cases}\text{value} & \text{if} \quad e<w\\ \emptyset & \text{if} \quad e\geq w\end{cases}$$

2. لأي تجزئة μ لِ r من النمط (h-restricted) فأن:

$$\#\left(\bigcap_{s=1}^{e} m.d_{b_s}\right)=\begin{cases}\text{value} & \text{if} \quad e<h \ \text{ or } \ (e=h \ \text{ and } \ h<w)\\ \emptyset & \text{if} \quad e>h \ \text{ or } \ (e=h \ \text{ and } \ h\geq w)\end{cases}$$

3. المخططات الرئيسية متبادلة الصفوف:

في هذا البحث سندرس صفة في المخطط (A) وتحديداً الرئيسية منها حيث سنقوم بمبادلة الصفوف في كل مخطط الفردية منها بالزوجية بشرط ان تكون المبادلة بالصف الزوجي الذي يأتي مباشرة بعد الصف الفردي. وهنا يجب علينا ان نقول انه اذا كان عدد الصفوف في اي مخطط رئيسي (A) فردياً فأن كل الصفوف تتبادل بالمواقع ماعدا الصف الاخير الذي سيبقى مكانه، ام اذا كان عدد الصفوف في اي مخطط رئيسي (A) زوجياً ففي هذه الحالة جميع الصفوف ستتبادل مواقعها بواقع



حيث k عدداً صحيحاً فرديا.

من الطبيعي تماماً أن يتبادر إلى الذهن ما جدوى تغير الصفوف وأين هي المشكلة فنقول إن هناك عدة أمثلة تطبيقية أوجبت علينا القيام بهذا العمل فمثلاً قد تضطر شركة ما إلى إدخال وجبات عمل مكان وجبلت أخرى أو عند خلط أوراق لعب بشكل مرتب كما يحصل هنا وأحيانا بشكل غير مرتب وهذا ما نأمل دراسته في وقت لاحق . سنرمز للمخطط الرئيسي متبادل الصفوف الفردية بالزوجية بالرمز (A_{x_1}).

بالعودة الى المثال السابق عندما$\mu = (6,6,5,5,3,1,1)$ فإن عملية المبادلة حينما $e = 2,3$ ستكون:

$e = 2$			
مخطط (A)			
$b_1 = 7$		$b_2 = 8$	
_	•	•	_
•	_	•	•
_	•	_	_
_	_	•	_
•	•	_	•
_	•	•	_
•	_	•	•
		_	_

$e = 2$			
مخطط(A_{x_1})			
$b_1 = 7$		$b_2 = 8$	
•	_	•	•
_	•	•	_
_	_	•	_
_	•	_	_
_	•	•	_
•	•	_	•
•	_	_	_
		•	•

e = 3		
مخطط (A)		
$b_1 = 7$	$b_2 = 8$	$b_3 = 9$
— • •	• — •	• • —
— — •	• — —	• • —
— — •	• — —	— • —
• — •	• • —	— • •
• — —	• • —	— • •
	— — —	— — —
		— — —

⇨

e = 3		
مخطط$\left(A_{x_1}\right)$		
$b_1 = 7$	$b_2 = 8$	$b_3 = 9$
— — •	• — —	• • —
— • •	• — •	• • —
• — •	• • —	— • •
— — •	• — —	— • —
• — —	— — —	— — —
	• • —	— • •
		— — —

ملاحظة

(1.3): لأجل تسهيل الحل ومعرفة سلوك الحركات سنعتبر الفراغات (–) والعقد (●) الموجودة في المخطط الرئيسي (A) مثل عناصر اي مصفوفة وبالتالي ستكون وفق مايلي:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1e} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2e} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3e} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4e} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

سنقسم هذا المخطط الى مستطيلات عمودية بحيث يحوي كل مستطيل على $\begin{array}{|c|}\hline a_{k,l} \\ a_{k+1,l} \\ \hline\end{array}$ بحيث k اي عدد صحيح فردي اكبر من الصفر و l اي عدد صحيح اكبر من الصفر. فواضح تماماً من هذا التقسيم ان اي مستطيل سيكون أمام واحدة من الحالات التالية: $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \bullet \\ \hline\end{array}$ ، $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ - \\ \hline\end{array}$ ، $\begin{array}{|c|}\hline - \\ \bullet \\ \hline\end{array}$ أو $\begin{array}{|c|}\hline - \\ - \\ \hline\end{array}$ في حالة عدد الصفوف زوجية. والحالات الاربعة السابقة وفي اخر الصف $\boxed{\bullet}$ أو $\boxed{-}$ في حالة عدد الصفوف فردية. بفعل الابدال ستكون الحالة معكوسة الترتيب.

قاعدة(2.3): اثناء العمل في ايجاد المخططات سنواجه العملية التي سنطلق عليها (*) وهي في حالة كون الصفوف فردية فقط اذا وجدت عقدة في اخر موقع من اي صف فستكون عملية الانتقال الى المخطط الذي يأتي بعده بـ $\begin{array}{|c|}\hline - \\ \bullet \\ \hline\end{array}$ اما اذا كان اخر موقع من اي صف فراغاً فأن عملية الانتقال ستكون $\begin{array}{|c|}\hline - \\ - \\ \hline\end{array}$.

مبرهنة (3.3): يلعب المخطط الرئيسي متبادل الصفوف $\left(A_{x_1}\right)$ في حالة b_1 دوراً مهماً في ايجاد بقية المخططات الرئيسية متبادلة الصفوف $\left(A_{x_1}\right)$ لاي تجزئة μ من r وفق مايلي:

1. العمود الاول في المخطط الرئيسي متبادل الصفوف $\left(A_{x_1}\right)$ في b_1 سيصبح (العمود الثاني في b_2 مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)) ثم (العمود الثالث في b_3 مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)) ... لغاية (العمود الاخير في b_e مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)).

2. العمود الثاني في المخطط الرئيسي متبادل الصفوف (A_{x_1}) في b_1 سيصبح (العمود الثالث في b_2 مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)) ثم (العمود الرابع في b_3 مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)) . لغاية (العمود ماقبل الاخير) في b_{e-1} مع الانتباه الى القاعدة (*) في (2.3)).

وهكذا بقية الاعمدة حيث تعمل بنفس الالية السابقة ماعدا لعمود الاخير وفق الالية التالية:

بالاعتماد على المستطيلات التي ورد ذكرها في الملاحظة (1.3) دائماً نأخذ اول مستطيل $\boxed{\begin{matrix}h_1\\ s_1\end{matrix}}$ ومعه عقدة فسينتقل في العمود الاول بشكل $\boxed{\begin{matrix}s_1\\ \bullet\end{matrix}}$ ، ثم يتبقى لدينا h_1 فنأخذ المستطيل الثاني ودائماً من b_1 وليكن $\boxed{\begin{matrix}s_2\\ h_1\end{matrix}}$ فعند الانتقال في b_2 سيكون $\boxed{\begin{matrix}h_2\\ s_2\end{matrix}}$ ... وهكذا الى ان نصل الى اخر مستطيل في حالة كون عدد الصفوف في b_1 زوجياً فتكون العملية هي نفسها او (عقدة او فراغ) اذا كانت الصفوف في b_1 فردي فحينها ستكون $\boxed{\begin{matrix}\text{الباقي}\\ \text{عقدة او فراغ}\end{matrix}}$

مثال : إذا كانت $\mu = (5,5,3,3,3,2,1,1,1,1)$ و $e = 3$ فأن:

مخطط (A)								
$b_1 = 10$			$b_2 = 11$			$b_3 = 12$		
—	●	●	●	—	●	●	●	—
●	●	—	●	●	●	●	●	●
●	—	●	—	●	—	●	—	●
●	●	—	●	●	●	—	●	●
—	●	●	—	—	●	●	—	—
			●	—	—	●	●	—
						—	—	—

مخطط (A_{x_1})								
$b_1 = 10$			$b_2 = 11$			$b_3 = 12$		
●	●	—	●	●	●	●	●	●
—	●	●	●	—	●	●	●	—
●	●	—	●	●	●	—	●	●
●	—	●	—	●	—	●	—	●
—	●	●	●	—	—	●	●	—
			—	—	●	●	—	—
						—	—	—

(*)+

قاعدة (4.3): عدد العقد المشتركة في حالة تقاطع المخططات الرئيسية (A) في حالة الصفوف زوجية قبل اجراء عملية التبديل تكون متساوية مع عدد العقد المشتركة عند تقاطع المخططات الرئيسية (A_{x_1}).

قاعدة (5.3): إذا كان عدد الصفوف فردية فهنالك ثلاثة حالات هي:

1. إذا وجدت عقدة مشتركة عند تقاطع المخططات الرئيسية (A) موجودة في الصف الأخير فهذه العقدة لاتظهر عند تقاطع المخططات الرئيسية (A_{x_1}) والسبب في ذلك هو استخدام القاعدة (*) في (2.3).

2. إذا وجدت عقد مشتركة قبل الصف الأخير عند تقاطع المخططات الرئيسية (A) فهذه العقد تظهر نفسها عند تقاطع المخططات الرئيسية (A_{x_1}).

3. إذا كان الصف الأخير يحوي على عقد كلها عند تقاطع المخططات الرئيسية (A) فالتقاطع عند المخططات الرئيسية (A_{x_1}) سيكون في عقدة واحدة فقط وموقعها دائماً في العمود الأول.

المصادر:

1. James, G. **1978**. Some combinatorial results involving Young diagrams, Math. Proc.C Cambridge Phil. Soc., 83, pp: 1 – 10 .
2. Fayers, M. **2007**. Another runner removal theorem or r-decomposition numbers of Iwahori – Hecke algebra and q-Schuc algebra, J. algebra, 310, pp:396 – 404.
3. Mohammed, H. S. **2008**. " Algorithms of the Core of Algebraic Young 's Tableaux ", M. Sc. Thesis, Mosul Univ.
4. Mahmood, A. S. **2011**, On the intersection of Young 's diagrams core, J. Educ. And Science (Mosul Univ.), 24(3), 159, pp: 143 -159.